[redacted]

EXPLORACIÓN MATEMÁTICA

Teoremas de Pappus y Guldin

Candidato [redacted]

Código [redacted]

Asignatura [redacted]

Número de Páginas: 16

[redacted]

ÍNDICE

TEOREMAS DE PAPPUS Y GULDIN

1. INTRODUCCIÓN

Este tema me parece muy interesante y útil ya que es una herramienta de la matemática que nos ayuda a calcular las superficies y volúmenes de los sólidos de revolución.

Si bien es cierto, este tema se ve en el currículo del IB, pero se presenta de una manera muy básica y limitada. Es por esto que, para ampliar mis conocimientos, he decidido realizar mi Exploración Matemática en este tema.

Mi motivación principal vino de mi tío ya que él me alentó a realizarla. Él es Ingeniero Civil y me contó que esta herramienta de la matemática se utilizaba muy seguido en el campo de las Ingenierías, más específicamente en la Ingeniería Civil con el propósito de hallar las áreas, los volúmenes y el centro de masa (centroide) de los sólidos revolución, los cuales son indispensables para el diseño y construcción de una edificación.

1.1. UTILIDAD DEL TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN

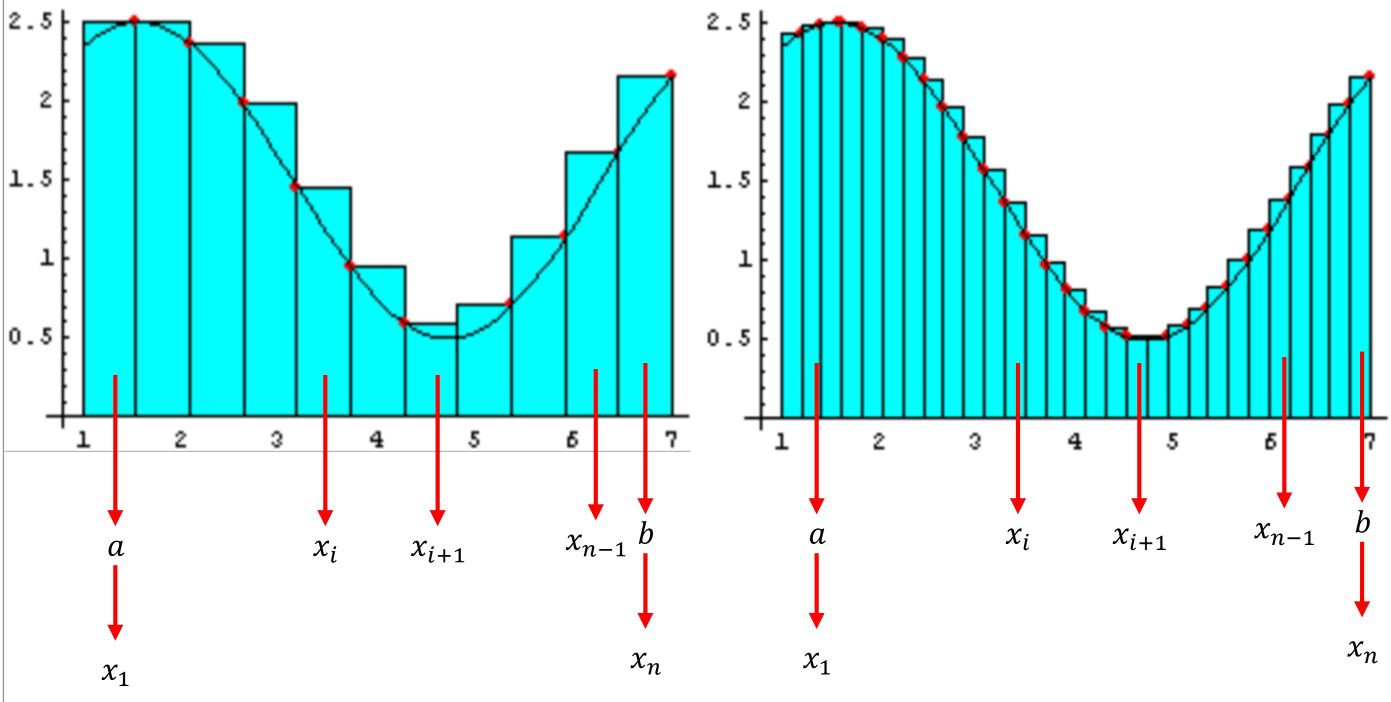
La utilidad del Teorema de Pappus y Guldin radica en que es una herramienta de la matemática que nos ayuda a calcular las superficies y volúmenes de los sólidos de revolución así como su centroide o centro de masa.

Sin embargo, esta Exploración Matemática va a girar en torno al cálculo del Área y al cálculo del Volumen de los sólidos revolución, sin hacer mención en el centro de masa (centroide).

1.2. OBJETIVO DE LA EXPLORACIÓN MATEMÁTICA

Como principal objetivo de esta Exploración Matemática, busco poder calcular las áreas superficiales y los volúmenes de los sólidos revolución. Esto se apreciará claramente en el ejemplo final de aplicación de los Teoremas de Pappus y Guldin en la vida real, en donde se calculará el área y el volumen de un vaso.

2. SUMATORIA DE RIEMANN[1]



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

En donde:

$$x_i = a + i\,\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Además:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

[1] Imágenes de la Sumatoria de Riemann extraída el 13/09/2015 de: http://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/cie_mat_calculo/Integral/Images/Integral%20de%20Riemann_gr_136.gif

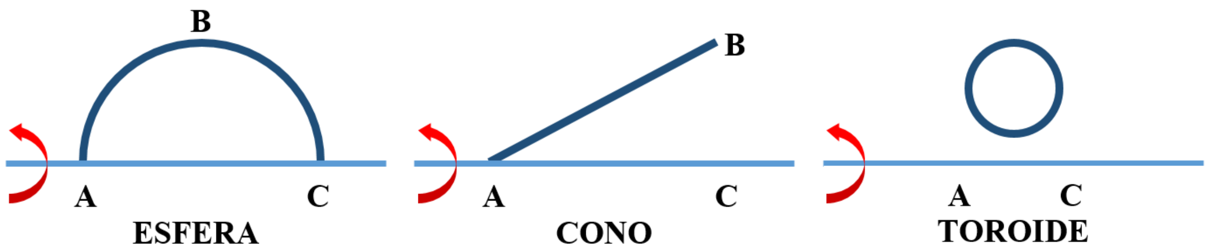
3. TEOREMAS DE PAPPUS Y GULDIN[2]

Los teoremas de Pappus y Guldin se refieren a cuerpos homogéneos y de revolución, su utilización permite tanto la determinación de volúmenes y superficies laterales de éstos cuerpos, como también la localización de sus centroides o centros de masa.[3]

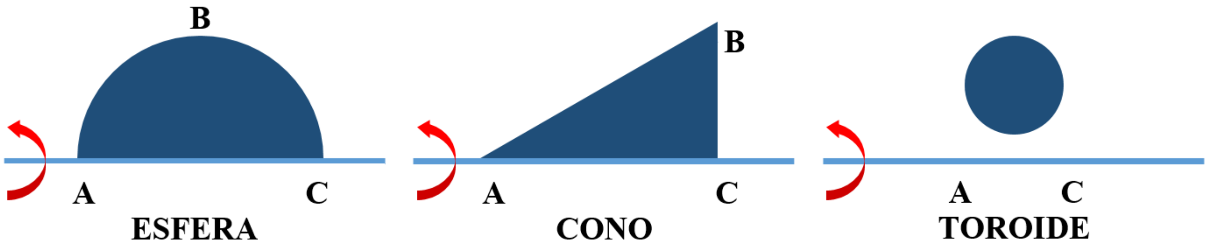
Estos teoremas fueron formulados primero por el geómetra griego Pappus durante el siglo III después de Cristo y fueron replanteados posteriormente por el matemático suizo Guldinus o Guldin (1577–1643), se refieren a superficies y cuerpos de revolución.

Una superficie de revolución se genera mediante la rotación de una curva plana con respecto a un eje fijo.

Por ejemplo, se puede obtener la superficie de una esfera rotando un arco semicircular ABC con respecto al diámetro AC; se puede producir la superficie de un cono rotando una línea recta AB con respecto a un eje AC y se puede generar la superficie de un toroide o anillo rotando la circunferencia de un círculo con respecto a un eje que no interseca a dicha circunferencia.



Un cuerpo de revolución se genera mediante la rotación de un área plana alrededor de un eje fijo. Como se muestra en siguiente figura, se puede generar una esfera, un cono y un toroide rotando la forma apropiada con respecto al eje que se indica.



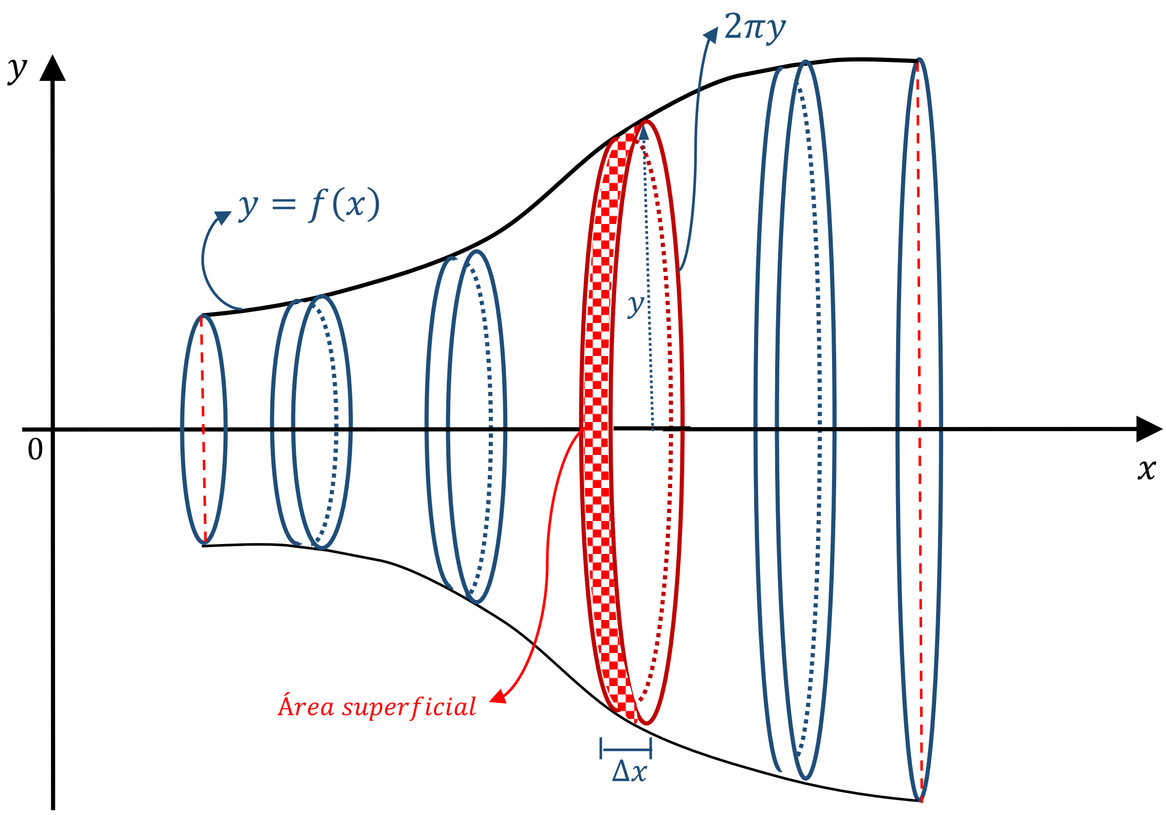
[2] BEER, Ferdinand P y otros. Mecánica Vectorial Para Ingenieros – Estática. McGraw–Hill. México D.F. 2007. ISBN: 978-970-6103-9. Páginas 238 – 239.
[3] Universidad del País Vasco. Departamento de Ingeniería Mecánica. Geometría de Masas. [En Línea]. (Citado el 09/08/2015). <http://www.vc.ehu.es/ingme/geom.pdf>.

3.1. PRIMER TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN

3.1.1. DEFINICIÓN

El área engendrada por una línea plana al girar en torno a un eje coplanario con ella, y que no la corta, es igual al producto de la longitud de la línea dada por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de masas de la misma en ese movimiento de rotación.[4]

3.1.2. GRÁFICO



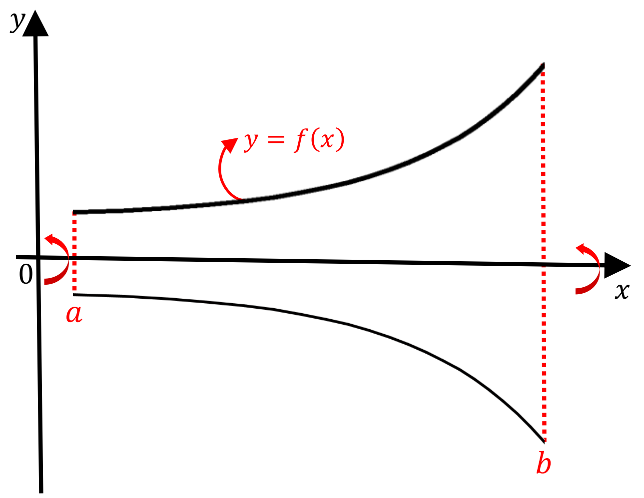
$$A = \int 2\pi \, y \, dx$$

En donde y es la distancia del elemento dx al eje x.

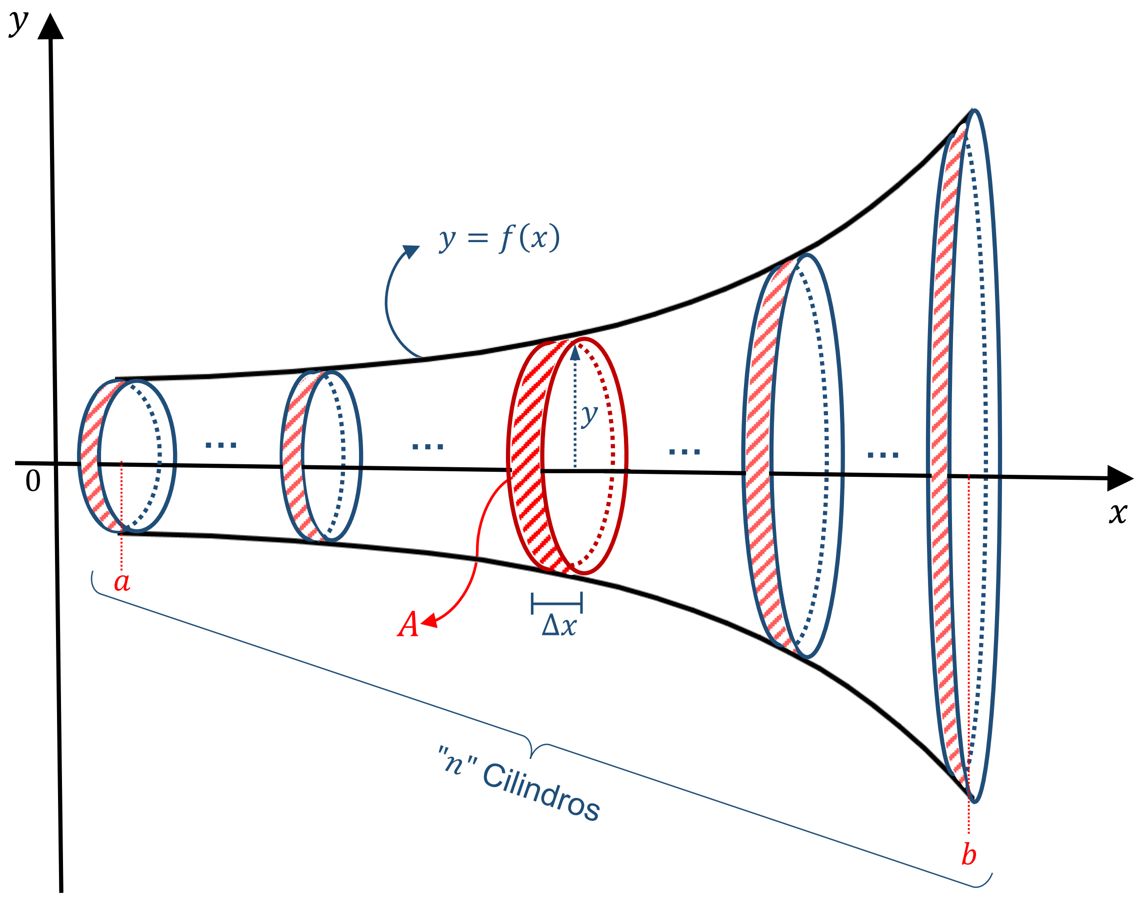
[4] Universidad del País Vasco. Departamento de Ingeniería Mecánica. Geometría de Masas. [En Línea]. (Citado el 09/08/2015). <http://www.vc.ehu.es/ingme/geom.pdf>.

3.1.3. DEMOSTRACIÓN

Sea una curva plana definida por la función $y = f(x)$, en un intervalo cerrado $[a, b]$ donde es continua. Se gira $y = f(x)$ alrededor del eje x y se obtiene la siguiente gráfica del sólido revolución en 2 dimensiones.[5]



Luego de dibujar los cilindros correspondientes y sombrear el área superficial de uno de ellos, la gráfica del sólido revolución en 3 dimensiones sería la siguiente.



[5] BEER, Ferdinand P y otros. Mecánica Vectorial Para Ingenieros – Estática. McGraw–Hill. México D.F. 2007. ISBN: 978-970-6103-9. Páginas 238 – 239.

Para hallar el área superficial sombreada A del sólido:

1) Se debe dividir el sólido revolución en "n" cilindros.
2) Se debe hallar el área superficial de **1** cilindro haciendo uso de la siguiente fórmula.

$$\Delta A = 2\pi\ y\ \Delta x$$

3) El área superficial total de este sólido revolución se obtendrá mediante la sumatoria de todas las áreas de los cilindros.

$$\sum \Delta S = \sum 2\pi\ y\ \Delta x$$

DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DEL PRIMER TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN[6]

A continuación se va a analizar en el intervalo cerrado $[a, b]$, mediante una sumatoria de Riemann.

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi\ f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$= 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$= 2\pi \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

En donde:

$$x_i = a + i\ \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Entonces, al hallar el límite de esta sumatoria cuando n tiende al infinito, se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

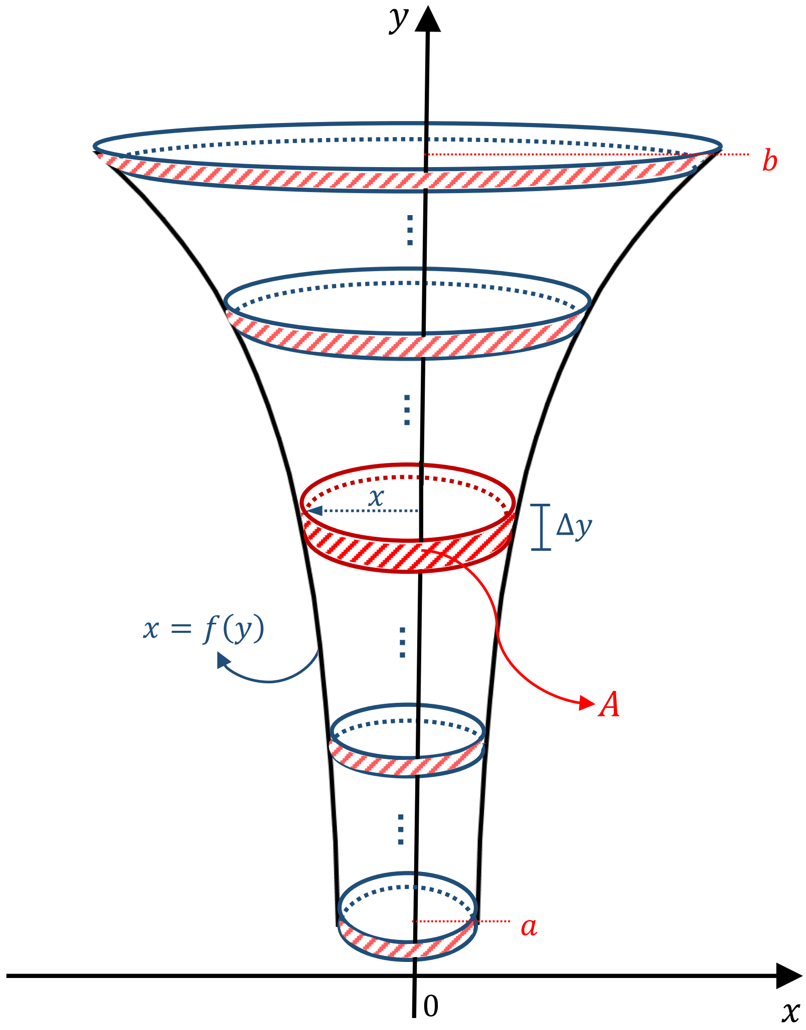
$$= 2\pi \int_a^b f(x) \cdot dx$$

$$= \int_a^b 2\pi\ f(x) \cdot dx = \int_a^b 2\pi\ y \cdot dx$$

Con lo cual se completa la demostración.

[6] DEMOSTRACIÓN PROPIA

De la misma forma, podemos obtener el área de un sólido revolución si es girado alrededor del eje y mediante el uso de la siguiente fórmula.



$$A = \int_a^b 2\pi\, x\, dy$$

En donde x es la distancia del elemento dy al eje y.

3.1.4. OBSERVACIÓN

Se debe señalar que la curva generatriz no debe cruzar el eje sobre el cual rota; si lo hiciera, las dos secciones, una a cada lado del eje, generarían áreas que tendrían signos opuestos y el teorema no podría aplicarse.[7]

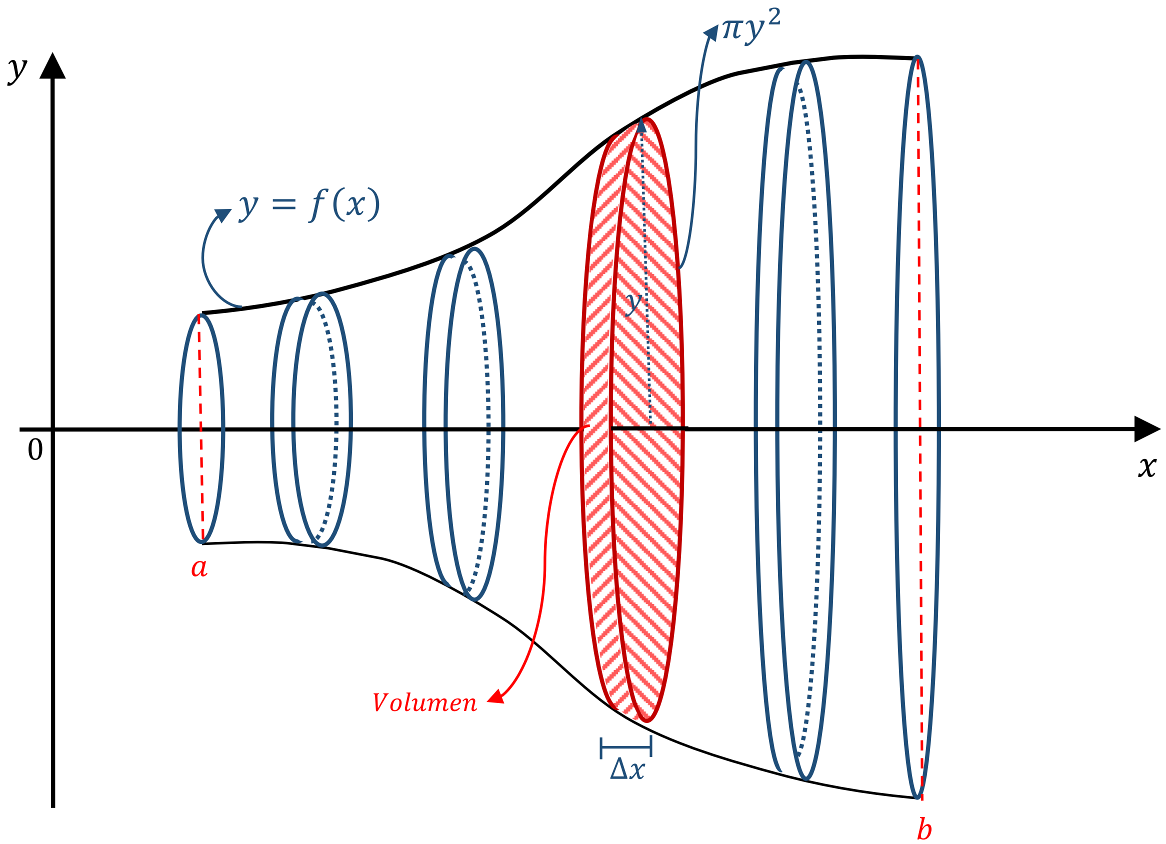
[7] BEER, Ferdinand P y otros. Ibídem.

3.2. SEGUNDO TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN

3.2.1. DEFINICIÓN

El volumen engendrado por una sección plana, al girar en torno a un eje coplanario con ella, y que no la corta, es igual al producto del área generatriz de dicha sección multiplicado por la longitud de la circunferencia de la misma en ese movimiento de rotación.[8] Sea ésta, una función continua en el intervalo $[a, b]$.

3.2.2. GRÁFICO



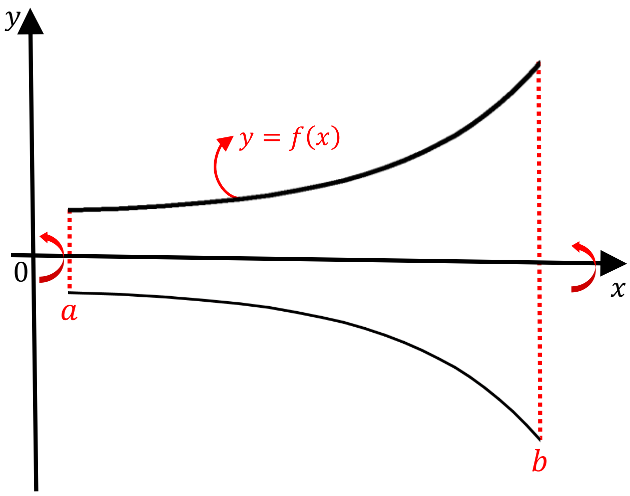
$$V = \int 2\pi\, y^2\, dx$$

En donde y es la distancia del elemento dx al eje x.

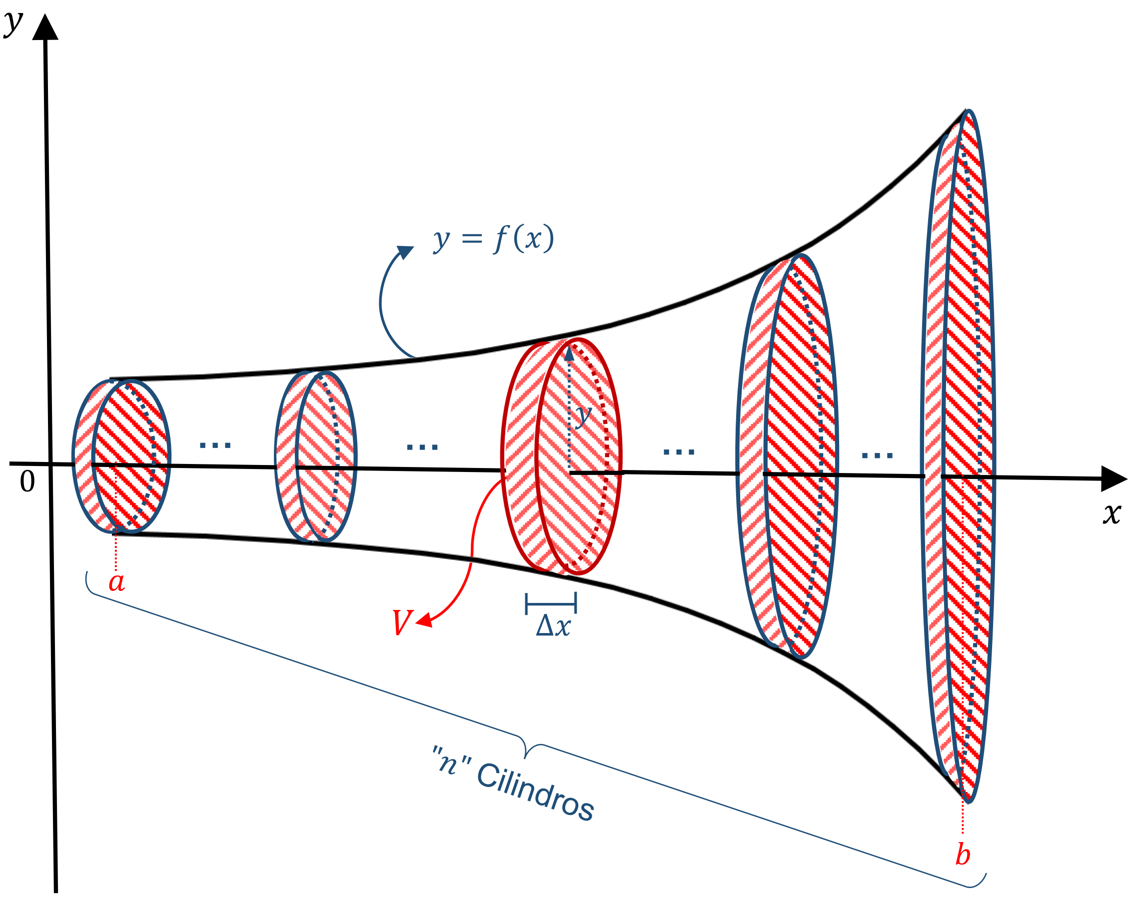
[8] Universidad del País Vasco. Departamento de Ingeniería Mecánica. Geometría de Masas. [En Línea]. (Citado el 09/08/2015). <http://www.vc.ehu.es/ingme/geom.pdf>.

3.2.3. DEMOSTRACIÓN

Sea una curva plana definida por la función $y = f(x)$, en un intervalo cerrado $[a, b]$ donde es continua. Se gira $y = f(x)$ alrededor del eje x y se obtiene la siguiente gráfica del sólido revolución en 2 dimensiones.[9]



Luego de dibujar los cilindros correspondientes y sombrear el volumen de uno de ellos, la gráfica del sólido revolución en 3 dimensiones sería la siguiente.



[9] BEER, Ferdinand P. y otros. Opere Citato.

Para hallar el volumen sombreado V del sólido:

1) Se debe dividir el sólido revolución en “n” cilindros.
2) Se debe hallar el volumen de **1** cilindro haciendo uso de la siguiente fórmula.

$$\Delta V = \pi\, y^2\, \Delta x$$

3) El volumen total de este sólido revolución se obtendrá mediante la sumatoria de todos los volúmenes de los cilindros.

$$\sum \Delta V = \sum \pi\, y^2\, \Delta x$$

DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DEL SEGUNDO TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN[10]

A continuación se va a analizar en el intervalo cerrado $[a, b]$, mediante una sumatoria de Riemann.

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\, f^2(x_i) \cdot \Delta x$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) \cdot \Delta x$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} f^2\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

En donde:

$$x_i = a + i\, \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Entonces, al hallar el límite de esta sumatoria cuando n tiende al infinito, se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

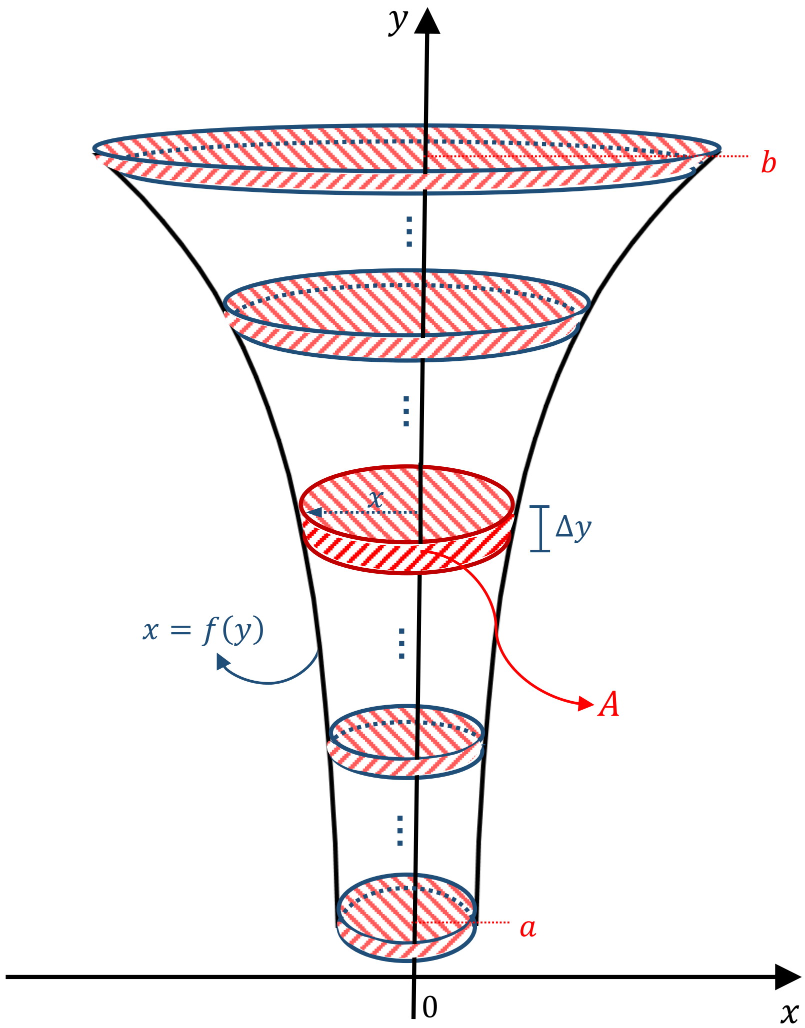
$$= \pi \int_a^b f^2(x) \cdot dx$$

$$= \int_a^b \pi\, f^2(x) \cdot dx = \int_a^b \pi\, y^2 \cdot dx$$

Con lo cual se completa la demostración.

[10] DEMOSTRACIÓN PROPIA

De la misma forma, podemos obtener el volumen de un sólido revolución si es girado alrededor del eje y mediante el uso de la siguiente fórmula.



$$V = \int_a^b \pi\, x^2\, dy$$

En donde x es la distancia del elemento dy al eje y.

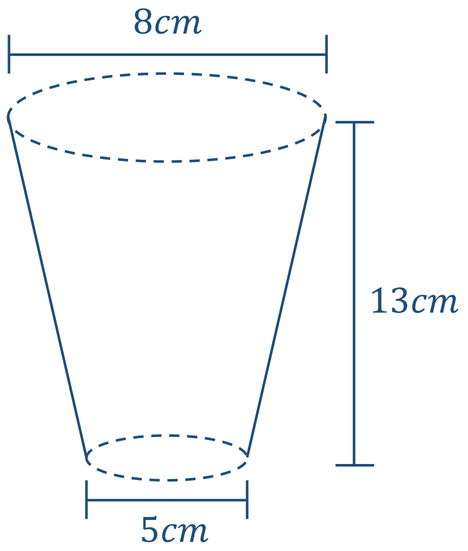
3.2.4. OBSERVACIÓN[11]

Es importante señalar que el teorema no puede aplicarse si el eje de rotación intersecta al área generatriz.

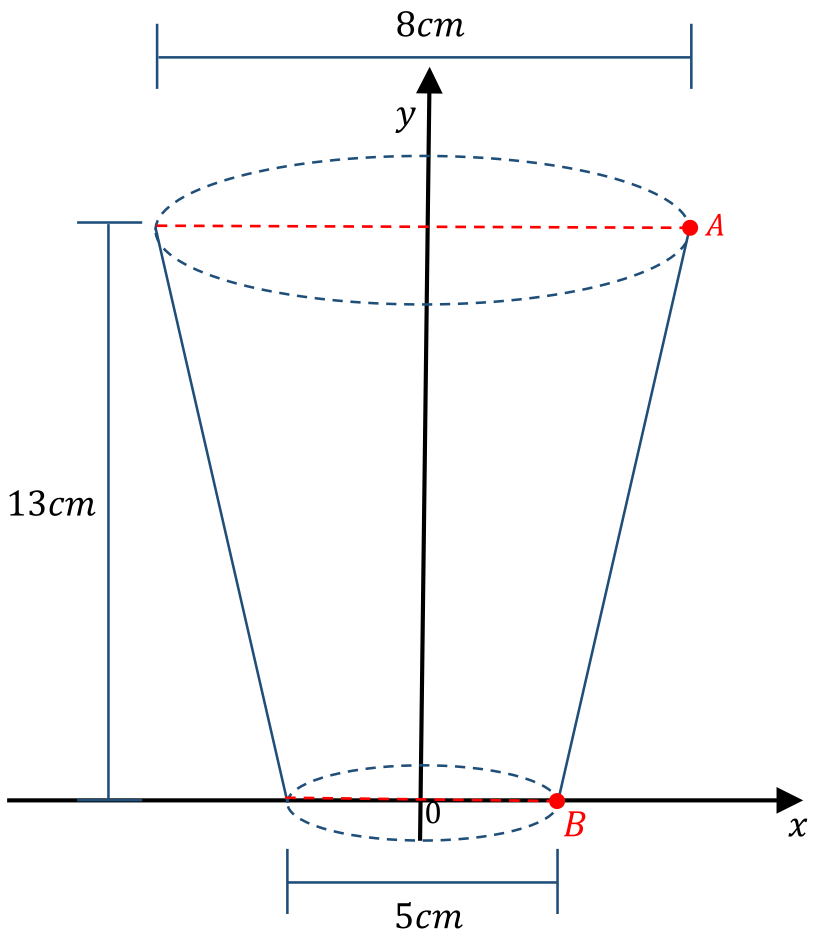
[11] BEER, Ferdinand P. y otros. Opere Citato.

3.3. APLICACIÓN EN LA VIDA REAL DE LOS TEOREMAS

Se dese hallar el volumen y el área superficial lateral de un vaso como el que se muestra a continuación.



1) Se debe colocar el vaso en un sistema cartesiano de ejes coordenados.



Del gráfico se pueden obtener los puntos A y B.

$$A = (8\,;13)$$
$$B = (2.5\,;0)$$

Habiendo hallado los puntos A y B, se puede hallar la pendiente de la recta $\overline{AB}$.

$$M_{AB} = \frac{13-0}{8-2.5} = \frac{13}{5.5} = \frac{130}{55}$$

$$M_{AB} = \frac{26}{11}$$

Habiendo hallado la pendiente de la recta $\overline{AB}$, se puede hallar la ecuación de ésta.

$$L_{AB}\colon\ y = mx + b$$

$$y = \frac{26}{11}x + b$$

Como los puntos A y B pertenecen a la recta, cualquiera de estos, satisface la ecuación. A continuación se reemplaza el punto A en la ecuación.

$$13 = \frac{26}{11}(8) + b$$

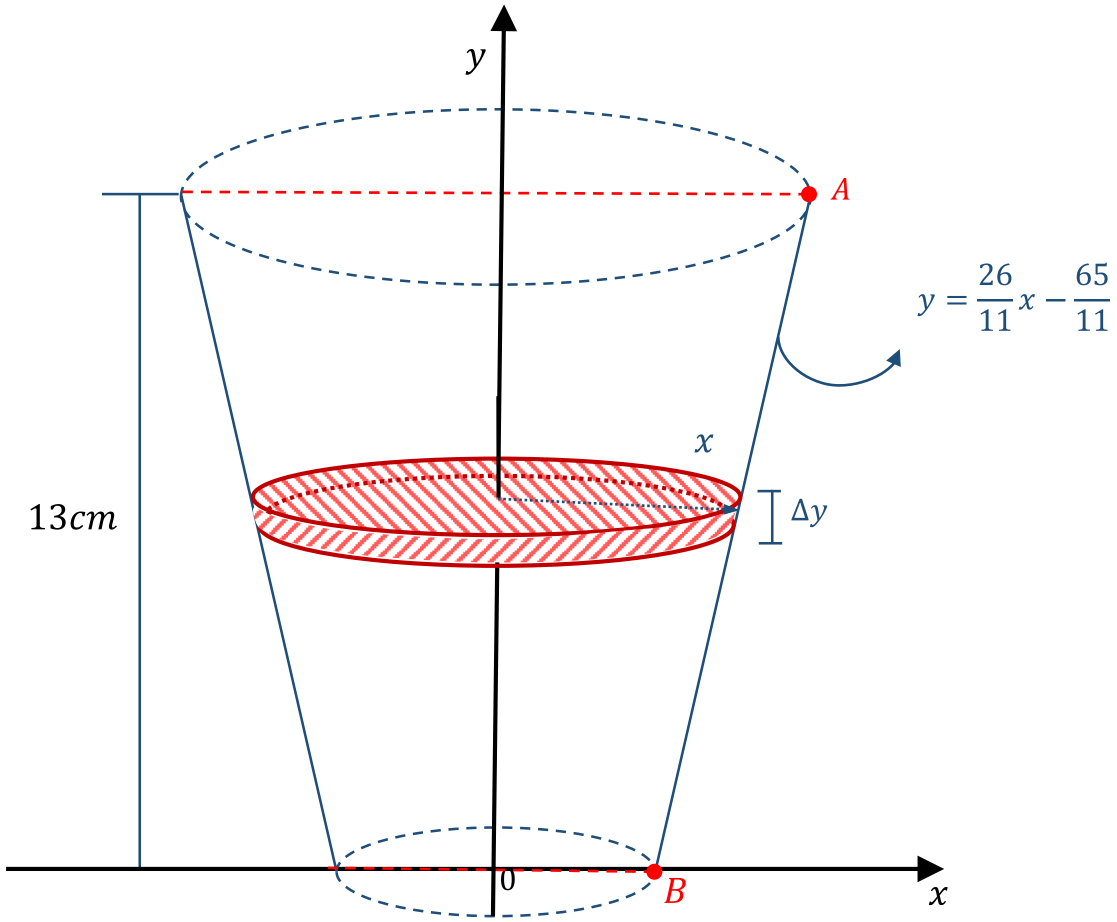
$$13 - \frac{208}{11} = b$$

$$-\frac{65}{11} = b$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta $\overline{AB}$ es:

$$y = \frac{26}{11}x - \frac{65}{11}$$

Habiendo hallado la ecuación de la recta $\overline{AB}$, se va a proceder a girarla alrededor del eje y en el intervalo $[0, 13]$.



A continuación se presentan las ecuaciones de y y de x, respectivamente.

$$y = f(x) = \frac{26}{11}x - \frac{65}{11}$$

$$x = f(y) = \frac{11}{26}y + \frac{65}{26}$$

Habiendo hallado las ecuaciones anteriores, se puede proceder a calcular el área superficial lateral del vaso.

$$A = \int_0^{13} 2\pi\, f(y)\, dy$$

$$A = \int_0^{13} 2\pi\, \left(\frac{11}{26}y + \frac{65}{26}\right)\, dy$$

$$A = 2\pi\, \left(\frac{11}{26} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{65}{26}y\right)\, dy \Bigg|\begin{matrix}13\\0\end{matrix}$$

$$A = 2\pi\, \left(\frac{11}{26} \cdot \frac{13^2}{2} + \frac{65}{26}(13)\right)\, dy \Bigg|\begin{matrix}13\\0\end{matrix}$$

Resuelto con calculadora

$$A = 428.82739721501$$

$$A = 429\ cm^2$$

Ahora, se procederá a calcular el volumen del vaso.

$$V = \int_0^{13} \pi\, f^2(y)\, dy$$

$$V = \int_0^{13} \pi\, \left(\frac{11}{26}y + \frac{65}{26}\right)^2\, dy$$

$$V = \int_0^{13} \pi\, \left(\frac{11^2}{26^2}y^2 + 2\left(\frac{11}{26}\right)\left(\frac{65}{26}\right)y + \frac{65^2}{26^2}\right)\, dy$$

$$V = \pi\, \left(\frac{11^2}{26^2} \cdot \frac{y^3}{3} + 2\left(\frac{11}{26}\right)\left(\frac{65}{26}\right)\frac{y^2}{2} + \frac{65^2}{26^2} \cdot y\right) \Bigg|\begin{matrix}13\\0\end{matrix}$$

$$V = \pi\, \left(\frac{11^2}{26^2} \cdot \frac{13^3}{3} + 2\left(\frac{11}{26}\right)\left(\frac{65}{26}\right)\frac{13^2}{2} + \frac{65^2}{26^2} \cdot 13\right) \Bigg|\begin{matrix}13\\0\end{matrix}$$

Resuelto con calculadora

$$V = 1228.6245269414$$

$$V = 1229\ cm^3$$

4. CONCLUSIONES

Los teoremas de Pappus y Guldin proporcionan una forma sencilla de calcular las áreas de superficies de revolución y los volúmenes de cuerpos de revolución. En forma inversa, estos teoremas se emplean para determinar el centroide de una curva plana cuando el área de la superficie generada por la curva es conocida o para determinar el centroide de un área plana cuando el volumen del cuerpo generado por el área es conocido.[12]

Se ha podido ver que los teoremas de Pappus y Guldin se pueden aplicar en algo tan simple y cotidiano como un vaso. En este caso, como se puso apreciar en el ejemplo, se utilizó el Primer Teorema de Pappus y Guldin con el propósito de hallar el área superficial lateral del vaso y luego se utilizó el Segundo Teorema de Pappus y Guldin para calcular el volumen del mismo.

Así como estos teoremas pueden ser aplicados en un vaso, a lo que llamaríamos “pequeña escala” también se pueden aplicar en edificaciones o construcciones, lo que sería a “gran escala”. No sólo se puede hallar el área superficial lateral de un vaso sino que también podríamos hallar el área superficial de un gran tanque de agua o incluso de un túnel. Asimismo podríamos hallar el volumen de los ejemplos antes mencionados.

Se ha podido ver además que para aplicar correctamente los teoremas de Pappus y Guldin se ha tenido que recurrir a otros conocimientos previos de funciones y ecuaciones, tal como la pendiente de una recta, la ecuación de una recta, entre otros. Además de recurrir a la Integración y a la Integral Definida. Todo está relacionado y todo funciona en conjunto.

Así como esta herramienta (los teoremas de Pappus y Guldin), existen muchas otras que no dejan de sorprendernos, prácticamente las matemáticas resuelven nuestras vidas si sabemos aplicarlas correctamente, y eso sólo se logra con la constante práctica.

[12] BEER, Ferdinand P. y otros. Mecánica Vectorial Para Ingenieros – Estática. McGraw–Hill. México D.F. 2007. ISBN: 978-970-6103-9. Páginas 238 – 239.

5. BIBLIOGRAFÍA

BEER, Ferdinand P. y otros. Mecánica Vectorial Para Ingenieros – Estática. McGraw–Hill. México D.F. 2007. ISBN: 978-970-6103-9. Páginas 238 – 239.

HOLGUIN, Leidy. Volúmenes de Sólidos de Revolución.
[En Línea]. (Citado el 09/08/2015).
<https://leidyholguin.files.wordpress.com/2010/09/solidosderevolucion.pdf>.

IGLESIAS PRADO, José. Teoremas de Pappus-Guldin.
[En Línea]. (Citado el 09/08/2015).
<https://fermionflavour.files.wordpress.com/2014/06/teoremas-de-pappus-guldin.pdf>.

Universidad del País Vasco. Departamento de Ingeniería Mecánica. Geometría de Masas. [En Línea]. (Citado el 09/08/2015).
<http://www.vc.ehu.es/ingme/geom.pdf>.